

anales de psicología, 1993, 9(2), 213-226

## Aproximación al PERT en evaluación de programas desde las técnicas matemáticas de análisis de grafos

Pedro Sánchez Algarra

Universidad de Barcelona  
Departamento de Estadística

M<sup>a</sup>. Teresa Anguera Argilaga\*

Universidad de Barcelona  
Deptº de Metodología de las CC. del Comportamiento

**Resumen:** La técnica de análisis de grafos, matemático-geométrica desde su origen, y muy escasamente utilizada en las Ciencias del Comportamiento, puede convertirse en un útil instrumento al servicio de muy variados ámbitos.

Aquí se propone su aplicación a la confección de los PERT (*Project Evaluation and Review Technique*), que constituyen el eje vertebrador de la planificación y serie de tomas de decisiones en implementación y evaluación de programas de intervención. El rigor que le es inherente es una garantía básica que se halla al servicio de la eficacia y eficiencia del programa.

**Palabras-clave:** Análisis de grafos, PERT, temporalización, evaluación de programas.

**Title:** PERT Proposal in program evaluation through graph mathematic technique.

**Abstract:** Graph analysis was always of the mathematical-geometric nature. It has not been used on Behavioral Sciences, with few exceptions, and it can become of useful instrument in several fields.

In this article it is proposed as application to PERT (*Project Evaluation and Review Technique*). The PERT graphics are the main axes of planning in program evaluation; also, they are relevant to take decisions during the process of program implementation and program evaluation. Its characteristic rigor constitutes a basic guarantee for efficacy and effectiveness of program.

**Keywords:** Graph analysis, PERT, timing, program evaluation.

### 1. Introducción

El análisis de grafos ha experimentado un rápido desarrollo en los últimos años, y ha llegado a convertirse en un importante instrumento estadístico-matemático para ámbitos tan diversos como la Investigación Operativa, la Psicología, la Genética, la Lingüística, la Sociología, etc. En Psicología existe ya una cierta tradición en la utilización de la teoría de grafos en los análisis de textos, tanto en México (Heredia, 1983; Huerta, 1982; Salazar, 1979; Solano, 1983) como en España (Camps, 1987; Boada, 1992).

La teoría de grafos funciona como modelo matemático en cualquier sistema que permita una relación binaria. Euler (1707-1782), considerado

como el padre de la teoría de grafos, ya la utilizó para tratar problemas de carácter topológico que en aquel momento resultaban irresolubles, como el puente de Königsberg. Ya en el siglo XIX, Kirchhoff (1847) desarrolló la que él denominaba teoría de los árboles con el fin de resolver el sistema de ecuaciones lineales que se planteaban en los circuitos eléctricos mediante la vía alternativa de los grafos. Pocos años después, y en el ámbito de la química orgánica, Cayley (1857) utilizó los grafos como único instrumento matemático para el análisis de los isómeros. Pero con igual éxito se iban extendiendo sus aplicaciones a otras áreas del conocimiento, y así, en Psicología, Lewin (1936), con la colaboración de Festinger y Cartwright, propuso que el "espacio vital" de un sujeto se representase por un mapa planar, en el cual las regiones representasen las distintas actividades realizadas por dicho sujeto, los distintos entornos que le eran propios, sus aficiones, etc., y mediante el análisis de dicho grafo logró gran éxito en el estudio de las

\* **Dirección para correspondencia:** M<sup>a</sup> Teresa Anguera Argilaga. Deptº de Metodología de las Ciencias del Comportamiento. Facultad de Psicología. Universidad de Barcelona. Zona Universitaria de Pedralbes. 08028 Barcelona (España).

© Copyright 1993 Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Murcia, Murcia (España). ISSN: 0212-9728. Artículo recibido: 14-10-93, aceptado: 22-11-93.

relaciones interpersonales. Igualmente, en el ámbito de la probabilidad mediante cadenas de Markov, Feller utilizaba grafos en el sentido de que los distintos eventos se representaban mediante puntos, y una línea dirigida de un punto a otro indicaba una probabilidad positiva de sucesión directa entre estos dos eventos; del mismo modo, en el análisis numérico, los grafos han permitido la inversión de matrices y al cálculo de los "eigenvalues".

Pero la disciplina que en mayor medida ha contribuido a un desarrollo de la teoría de grafos ha sido, sin duda, la Sociología (Wilson, 1983), en la que la modelización matemática de redes sociales, en las últimas décadas, ha impulsado aún más el desarrollo básico y las posibilidades de aplicación de la teoría de grafos.

Se han considerado tres tipos básicos de modelos: a) Modelos puros de muestreo para la realización de inferencias de grafos de amplia envergadura, b) modelos simples de transición para grafos deformados aleatoriamente o por circunstancias inciertas, y c) modelos estocásticos simples para cambios no determinísticos en el grafo. La especificación sistemática de cada uno de ellos nos marcará la pauta para la delimitación de su aplicabilidad y limitaciones en diferentes situaciones, así como también para el surgimiento de nuevos modelos más sofisticados.

## 2. Fundamento y notación

Un **grafo**  $(V, L)$  consiste en una serie no vacía  $V$  de elementos denominados *nodos* (vértices, puntos) y una subserie  $L$  de la clase de pares no ordenados de distintos nodos. Los elementos de  $L$  se denominan *aristas* (líneas, enlaces). Si la serie  $V$  de nodos del grafo  $(V, L)$  se comprende en su contexto, será simple referirnos al grafo  $L$ .

El número de elementos en  $V$  y  $L$  se llama, respectivamente, el **orden** y **tamaño** en el grafo. Así, la **Figura 1** muestra un grafo de orden 16 y tamaño 12. Si un grafo tiene un orden  $N$ , su tamaño será al menos

$\binom{N}{2}$  y será **completo** cuando su tamaño sea el máximo.

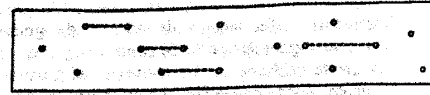


Figura 1. Un grafo de orden 16 y tamaño 12.

Un **grafo**  $(V, L)$  se puede representar por su **matriz adyacente**  $X$ , la cual se define por  $X_{vv} = 0$  para  $v \in V$  y  $X_{uv} (= X_{vu})$  igual a 1 ó a 0 según que  $\{u, v\}$  pertenezca a  $L$  para  $u \neq v$ ,  $u, v \in V$ . Una arista  $\{u, v\}$  se dice que es incidente respecto a  $u$  y a  $v$ ; y de  $u$  y  $v$  se dice que son **adyacentes** si  $\{u, v\} \in L$ .

El **grado** de un nodo  $v$  se define como el número de aristas incidentes en él; es decir

$$\sum_{u \in V} X_{uv} \quad (1)$$

La **distribución de grado** de  $L$  viene dado por las frecuencias  $F_0, F_1, \dots, F_{N-1}$  de nodos de grados  $0, 1, \dots, N-1$ , respectivamente, donde  $N = |V|$  es el orden del grafo. El grado de distribución satisface  $0 \leq F_i \leq N$  para  $i = 0, 1, \dots, N-1$  y

$$\sum_{i=0}^{N-1} F_i = N \quad (2)$$

Es conveniente decir que  $L$  tiene una **distribución de grado**

$$0^{F_0} 1^{F_1} \dots (N-1)^{F_{N-1}} \quad (3)$$

Así, el grafo de la **Figura 1** tiene una distribución de grado  $0^1 1^{10} 2^2 3^2 4^1$ .

Los nodos de grado 0 se denominan **aislados**. El tamaño  $R = |L|$  de un grafo viene dado por la mitad de la suma de los grados; es decir,

$$2R = \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} X_{uv} = \sum_{i=0}^{N-1} iF_i \quad (4)$$

Si  $Q$  es la suma de cuadrados de los grados:

$$Q = \sum_{u \in V} \left( \sum_{v \in V} X_{uv} \right)^2 = \sum_{i=0}^{N-1} i^2 F_i \quad (5)$$

Y entonces la media  $\mu$  y la variancia  $\sigma^2$  de los grados viene dada por:

$$\mu = 2R/N \quad \sigma^2 = Q/N - 4R^2/N^2 \quad (6)$$

Un **subgrafo** de un grafo  $(V, L)$  es un grafo  $(V', L')$  en que  $V' \subseteq V$  y  $L' \subseteq L$ . Hay que tener en cuenta que el hecho de que  $(V', L')$  sea un grafo implica que  $L'$  tenga que ser una subserie de la clase  $\wp^2(V')$  de pares no ordenados de nodos en  $V'$ .

Hay tres tipos diferentes de subgrafos:

a) **Componentes**. Dos nodos distintos  $u$  y  $v$  en un grafo  $(V, L)$  están conectados si hay una secuencia  $(v_0, \dots, v_n)$  de nodos en  $V$  de modo que  $v_0 = u$ ,  $v_n = v$ , y  $\{v_{i-1}, v_i\} \in L$  para  $i=1, \dots, n$ . Un nodo está conectado consigo mismo. La conexión se define por tanto como una relación de equivalencia en  $V$  que divide  $V$  en  $K$  clases de equivalencia no vacías  $V_1, \dots, V_K$  tales que no existen aristas que conecten dos nodos de clases distintas. Si  $L_1, \dots, L_K$  son la serie de aristas en  $L$  que conectan nodos en las clases  $V_1, \dots, V_K$ , respectivamente, entonces  $(V_1, L_1), \dots, (V_K, L_K)$  son subgrafos de  $(V, L)$  y se denominan los **componentes** de  $(V, L)$ .

Un **grafo conectado** es un grafo que sólo consta de un componente. Un grafo conectado de orden  $N$  tiene al menos  $N-1$  aristas, y entonces (es decir, cuando tiene el tamaño mínimo) se le conoce por **árbol**; y un grafo en que todos los componentes sean árboles se denomina **bosque**. Finalmente, un grafo en que todos los componentes con completos se le conoce por **grafo transitivo**.

La **distribución de orden de los componentes** de  $(V, L)$  viene dada por las frecuencias  $K_1, \dots, K_N$  de componentes de orden  $1, \dots, N$ , respectivamente, donde  $N = \sum V^3$ . Estas frecuencias satisfacen las igualdades

$$K = \sum_{i=1}^N K_i \quad N = \sum_{i=1}^N iK_i \quad (7)$$

y las desigualdades

$$\sum_{i=1}^N (i-1)K_i \leq R \leq \sum_{i=2}^N \binom{i}{2} K_i \quad (8)$$

donde  $R = |V|$ . Estas desigualdades pueden comprobarse aprovechando el hecho de que cada componente de orden  $i$  tiene un tamaño que es al menos de  $i-1$  (lo que da lugar a un componente de

árbol) y a lo sumo  $\binom{i}{2}$  (que significaría un componente completo). Según Frank (1978a, 1981), de (8) se sigue que

$$N - K \leq R \leq \binom{N-K+1}{2} \quad (9)$$

$L$  tiene la distribución de orden de los componentes

$$1^{K_1} 2^{K_2} \dots N^{K_N} \quad (10)$$

Así, el grafo de la **Figura 1** tiene una distribución de orden de los componentes  $1^1 2^0 3^0 4^1 5^1 6^1$ .

b) **Subgrafos inducidos**. Si  $S \subseteq V$ , se define el subgrafo de  $(V, L)$  **inducido** por  $S$  como el grafo con la serie de nodos  $S$  y la serie de aristas  $L(S)$ , que consta de todas las aristas en  $L$  que conectan dos nodos en  $S$ . Los subgrafos inducidos de orden 2 y 3 se llaman **diádas** y **triádas**, respectivamente. En la Figura 2 hay una diáda y siete diferentes triádas.

Los subgrafos inducidos resultan de gran utilidad en investigaciones basadas en una muestra de nodos y observaciones de adyacencias entre los nodos muestreados, y siempre resulta conveniente, a efectos de un mayor grado de concordancia, restringir los datos obtenidos a adyacencias dentro de la muestra, lo cual da lugar a subgrafos inducidos.

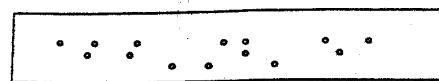


Figura 2. Grafos diádicos y triádicos.

Un grafo  $(V, L)$  de orden  $N$  tiene  $\binom{N}{2}$

diádas y  $\binom{N}{3}$  triádas. La **distribución de diádas**

viene dada por las frecuencias  $(T_{20}, T_{21})$  de diádas en  $L$  de tamaños 0 y 1, respectivamente; la **distribución de triádas**, a su vez, viene dada por las frecuencias  $(T_{30}, \dots, T_{33})$  de triádas en  $L$  de tamaños 0, ..., 3, respectivamente. Estas

frecuencias de díadas y tríadas cumplen las siguientes relaciones:

$$T_{20} + T_{21} \binom{N}{2} \quad T_{21} = R = |G| \quad (11)$$

$$T_{30} + \dots + T_{33} = \binom{N}{3} \quad (12)$$

$$T_{31} + 2T_{32} + 3T_{33} + T_{21} = (N-1)R - Q/2$$

Es posible deducir propiedades de la distribución de grados ( $F_0, \dots, F_{N-1}$ ) a partir de la distribución de tríadas. Mediante unos pocos conocimientos de combinatoria se puede comprobar que

$$T_{31} + T_{32} = \sum_{i=1}^{N-1} i(N-1)F_i / 2 = (N-1)R - Q/2 \quad (13)$$

$$T_{32} + 3T_{33} = \sum_{i=2}^{N-1} \binom{i}{2} F_i = (Q - 2R) / 2 \quad (14)$$

donde  $Q$  es la suma de cuadrados de los grados. De aquí se deduce que  $R$  y  $Q$  vienen dados por la distribución de tríadas de acuerdo a

$$R = (T_{31} + 2T_{32} + 3T_{33}) / (N-2) \quad (15)$$

$$Q = 2 [T_{31} + NT_{32} + 3(N-1)T_{33}] / (N-2) \quad (16)$$

Esto implica que la media y la varianza de la distribución de grados puede calcularse a partir de la distribución de tríadas, de acuerdo con (6), (15) y (16).

La distribución de tríadas también puede utilizarse para inferir otras propiedades del grafo. Así, por ejemplo, un grafo transitivo tiene  $T_{32} = 0$ , y un bosque tiene  $T_{33} = 0$ . Frank (1978b) ha demostrado que la distribución triádica de un grafo transitivo es suficiente para determinar el grafo completo si su orden es como máximo 13; si el orden es como máximo 21, hay como mucho dos grafos transitivos con la misma distribución triádica; de hecho, para el orden 21 hay 694 distribuciones triádicas distintas, cada una de las cuales es compatible con un único grafo transitivo, y 49 distribuciones triádicas, cada una de las cuales es común a dos grafos transitivos. El número de grafos en una clase dada que es compatible con una determinada distribución triádica se conoce como la **multiplicidad** de la distribución triádica en esta clase.

La distribución triádica ofrece información acerca de la distribución de orden de los componentes. En particular, podemos tener límites más bajos en el número  $K$  de componentes utilizando la distribución triádica. Para comprobarlo, si designamos por  $N_1, \dots, N_K$  los órdenes de los componentes e introducimos la polinomial

$$\prod_{k=1}^K (x - N_k) = \sum_{r=0}^K (-1)^r C_r x^{K-r} \quad (17)$$

donde

$$C_0 = 1 \quad C_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} N_{i_1} \dots N_{i_r} \quad (18)$$

para  $r = 1, \dots, K$ . Según Hardy, Littlewood & Pólya (1952), los números

$$\bar{C}_r = \frac{C_r}{\binom{K}{r}} \quad (19)$$

satisfacen para cada  $r = 1, \dots, K-1$  la desigualdad

$$\bar{C}_{r-1} \bar{C}_{r+1} \leq \bar{C}_r^2 \quad (20)$$

obteniéndose una igualdad si y sólo si todos los órdenes de los componentes son iguales. La desigualdad (20) da lugar al siguiente límite más bajo para  $K$ :

$$K \geq \frac{[r^2 C_r^2 - (r-1)(r+1)C_{r-1}C_{r+1}]}{[rC_r^2 - (r+1)C_{r-1}C_{r+1}]} \quad (21)$$

a condición de que el denominador sea positivo. Sustituyendo

$$C_1 = N \quad C_2 = T_{20} = \binom{N}{2} - R \quad C_3 = T_{30} \quad (22)$$

en la ecuación (21), hallamos que para  $r=1$

$$K \geq \frac{N^2}{(N+2R)} \quad (23)$$

y para  $r=2$

$$K \geq \frac{[4T_{20}^2 - 3NT_{30}]}{[2T_{20}^2 - 3NT_{30}]} \quad (24)$$

donde, de acuerdo con las ecuaciones (11), (12) y (15),

$$T_{20} = \frac{(3T_{30} + 2T_{31} + T_{32})}{(N-2)} \quad (25)$$

El límite más bajo en  $K$  que viene dado por la ecuación (23) es mejor que el  $N-R$  dado por la

ecuación (9) si y sólo si  $2R > N$ , es decir, si y sólo si el grado de la media es mayor que 1. Y el límite más bajo en  $K$  que se halla mediante la ecuación (24) es mejor que el que ofrece la ecuación (23) si y sólo si

$$T_{20}(4T_{20} - N^2) < 3NT_{30} < 2T_{20}^2 \quad (26)$$

c. **Estrellas.** Si  $S \subseteq V$  definimos la **estrella** de  $(V, L)$  obtenida de  $S$  como el subgrafo formado por la serie de nodos  $A(S)$  y la serie de aristas  $H(S)$ , donde  $A(S)$  se compone de todos los nodos que se hallan en  $S$  o adyacentes a algún nodo en  $S$ , y donde  $H(S)$  consta de todas las aristas que son incidentales a algún nodo en  $S$ . La serie  $S$  es el **centro** de la estrella, y si el centro tiene tamaño  $n$ , la estrella se denomina también **n-estrella**.

Existe una estrecha relación entre la serie de aristas  $H(S)$  y la serie de aristas  $L(\overline{S})$  inducidas por el complementario de  $\overline{S}$  respecto a  $V$ . Si la notación correspondiente a la barra se utiliza también para complementarios de series de aristas respecto a  $\mathcal{P}_2(V)$ , entonces

$$H(S) = L \cap L(\overline{S}) \quad (27)$$

Es decir, las aristas en la estrella con centro  $S$  son las aristas en  $L$  que no están en el subgrafo de  $L$  inducidas por el complementario de  $S$ .

Las estrellas se utilizan con profusión en investigaciones de grafos extensos que se apoyan en una muestra de nodos y en datos acerca de las adyacencias de los nodos muestreados.

### 3. Representación matricial de grafos

La utilización informática de los grafos obliga a una representación en forma matricial. A todo grafo se le puede asociar una **matriz cuadrada booleana M**, donde las filas van a representar el vértice inicial y las columnas el vértice final, de modo que en cada uno de sus elementos colocaremos:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe el arco } (v_i, v_j) \text{ entre sus vértices} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Así, para el grafo de la Figura 3 la matriz asociada es

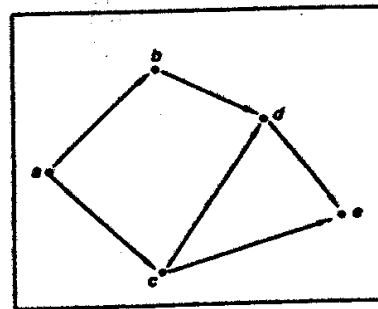


Figura 3. Grafo asociado a M.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Las propiedades de la matriz asociada a un grafo son las siguientes:

- La matriz traspuesta de  $M(M')$  representa a otro grafo en el que las flechas de sus arcos están invertidas.
- El grado de salida de un vértice viene dado por la suma aritmética de los elementos de su fila en la matriz, y el grado de entrada de un vértice por la suma de los elementos de su columna en la matriz.
- Si el grado de entrada de un vértice es nulo (grado  $E(v)=0$ ) es un vértice de entrada al grafo. Por tanto, es aquél que le corresponde una columna de ceros.
- Análogamente, si el grado de salida de un vértice es nulo (grado  $S(v)=0$ ) es un vértice de salida del grafo; por tanto, es aquél que le corresponde una fila de ceros.
- La matriz  $M$  indica los caminos de longitud 1 desde un vértice dado a otro, y el número de ellos. Hallando  $M^2 = M.M$  tenemos los caminos de longitud 2,  $M^3$  indica los caminos de longitud 3, y así sucesivamente con los caminos de longitud 4, 5, ...,  $n$ , siendo  $n$  el número de vértices.

- e) En cuanto a la detección de circuitos, si no existen circuitos habrá un número , siendo  $n$  el número de vértices, tal que  $M^k$  es nula a partir de dicha potencia  $k$ . En el caso de no haber circuitos las sucesivas potencias de  $M$  deben tener las diagonales principales siempre nulas, mientras que en caso contrario hay algún circuito.

Así, a partir del ejemplo anterior,

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay 2 caminos de longitud 2 entre  $a$  y  $d$ , 1 entre  $a$  y  $c$ , 1 entre  $b$  y  $c$ , etc.

$$M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, hay dos caminos de longitud 3 entre  $a$  y  $c$ .

$$M^4 = M \cdot M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego no hay ningún camino de longitud 4, y al ser la matriz nula, indica que el grafo no posee circuito.

#### 4. Aplicación de la teoría de grafos al PERT

Ante un uso creciente de programas de intervención en todos los ámbitos de la conducta humana, resulta urgente y de vital importancia que nos planteemos si no resultará en muchos casos baldío el esfuerzo de elaborar e implementar un programa sin la necesaria planificación que implica el PERT.

Históricamente, el PERT (*Project Evaluation and Review Technique*) desarrollado fun-

damentalmente por la casa Booz, Allen y Hamilton, en colaboración con la Marina USA y la empresa aeronáutica Lockheed, y que fue aplicado en el proyecto del submarino Polaris, es la más utilizada de las formas de planificación de proyectos (Veney & Kaluzny, 1984). El PERT implica la existencia de una **temporalización detallada** (PERT, sistema Ghant) en la que se constatan la secuenciación y concurrencia de las acciones del programa. Precisamente en base a este criterio "de agenda" se han propuesto sistemas de evaluación (Muscatello, 1988).

En buen número de programas de intervención el PERT se ha utilizado como mera planificación en que figuraba la relación de actividades y el "timing" asignado a cada una. Un programa de intervención, independientemente del ámbito al que se refiere, está configurado por una serie de tareas o actividades que se realizan en un determinado orden o secuencia. Una actividad consume un tiempo y unos recursos, y, en terminología PERT, un suceso es un momento en el tiempo que indica cuándo empieza o termina una actividad o un conjunto de actividades, y no consume tiempo ni recursos. Dado que todo programa implica la existencia de una **temporalización detallada**, que se explicita mediante el PERT (sistema Ghant) en la que se constatan la secuenciación y concurrencia de las acciones del programa, precisamente en base a este criterio "de agenda" se han propuesto sistemas de evaluación (Muscatello, 1988).

Un proyecto puede esquematizarse gráficamente usando un grafo, donde los arcos del grafo indican las actividades, y los vértices, los sucesos. Las flechas irán de izquierda a derecha indicando que se avanza en el tiempo. La longitud de las flechas no precisa ser dibujada a escala.

El grafo que representa un proyecto será siempre un grafo sin circuitos. Así, en la Figura 4 el vértice 1 es el suceso inicial de la actividad A, y el vértice 2 es su suceso final; además, éste sirve de suceso inicial para la actividad B, y así sucesivamente.

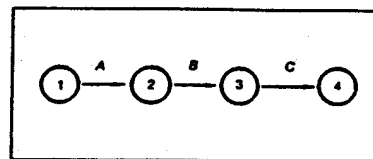


Figura 4. Sucesos

Entre los sucesos se pueden crear convergencias, o divergencias, o ambas.

Una vez construido el grafo completo del programa se numeran cada uno de los sucesos. Para ello, si el grafo está bien dibujado por niveles, se irán numerando sus nodos desde 1 en adelante, de izquierda a derecha, y en un mismo nivel de arriba a abajo, de modo que si para una actividad el suceso inicial es el  $i$  y el final es el  $j$ , se cumple siempre que  $i < j$ :

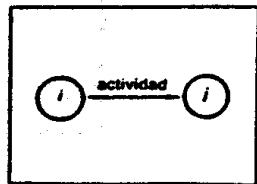


Figura 5. Numeración de los sucesos.

De este modo, para las actividades anteriores de un suceso se cumplirá que todos ellos tienen número de suceso menor.

La elaboración del grafo PERT de un programa implica la construcción del cuadro de relaciones formado por dos columnas:

. En la primera, se indican todas las actividades una a una.

. En la segunda, se indican las actividades inmediatamente anteriores a ésta.

Siempre supondremos que habrá un único suceso inicio y otro suceso fin de proyecto, que se averigua de las siguientes formas:

a) Conocido el cuadro de relaciones, del suceso inicio del proyecto partirán las actividades que no tengan anteriores.

b) En el suceso fin del proyecto finalizarán aquellas actividades que luego no aparezcan como anteriores.

Como ilustración, nos referimos a un determinado programa perteneciente al ámbito de Servicios Sociales que tiene como objetivo la desinstitucionalización de niños procedentes de familias maltratadoras, y para el cual se han propuesto siete actividades {A,B,C,D,E,F,G}, que cumplen:

a) A y B se inician a la vez.

b) D,E y F empiezan tras haber finalizado A.

c) C empieza al terminar B.

d) G se inicia al acabar C y F.

Los tiempos previstos para cada uno de ellos son:

Cuadro 1. Tiempos de cada actividad

Actividad	Tiempos
A	6
B	4
C	2
D	1
E	3
F	4
G	2

El cuadro de relaciones será:

Cuadro 2. Relaciones

Actividad	Anteriores	Operación
A	-	Aplicando a)
B	-	Aplicando a)
C	B	Aplicando c)
D	A	Aplicando b)
E	A	Aplicando b)
F	A	Aplicando b)
G	C, F	Aplicando d)

De acuerdo con lo indicado, los sucesivos pasos de construcción del PERT serán:

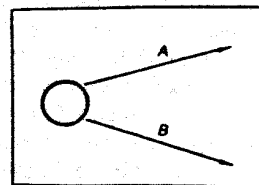
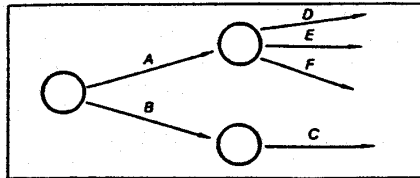
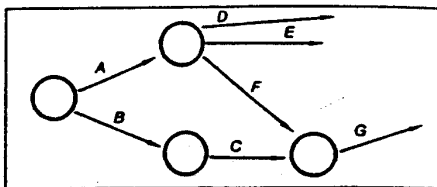


Figura 6. Paso 1 del PERT, en que se dibuja el suceso inicio y las dos actividades de partida

A la actividad A le seguirán las actividades que tengan A en la columna **Anteriores**, que en nuestro caso son D,E y F. De igual modo a la actividad B le seguirá la C:

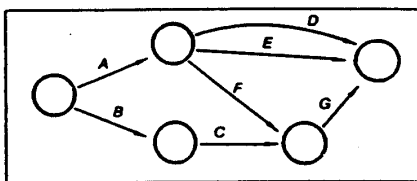


**Figura 7.** Paso 2 del PERT, en donde se contempla como a la Actividad A le seguirán las actividades que tengan "A" en la columna "anteriores", en nuestro caso D, E y F. De igual modo, a la actividad B le seguirá la C.



**Figura 8.** Paso 3 del PERT. La actividad G sigue a las actividades F y C.

Y finalmente, puesto que D, E y G no aparecen en la columna "anteriores", son las actividades que terminan en el suceso final del programa:

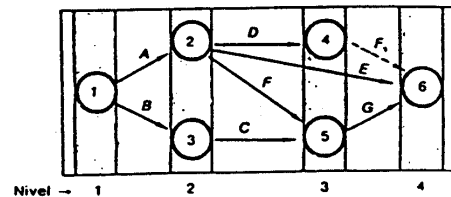


**Figura 9.** Paso 4 del PERT.

Pero el grafo anterior presenta dos actividades paralelas, la D y la E, lo que podemos solucionar añadiendo una actividad ficticia<sup>1</sup>, por ejemplo,

<sup>1</sup> Las actividades **ficticias** son actividades no reales que surgen como necesidad de representar ciertas situaciones en un grafo, que no consumen tiempo ni recursos. Se representan mediante una flecha a trazos y tienen utilidad en los dos casos siguientes:  
a) Cuando existen prelación lineales de convergencia y divergencia a la vez.  
b) Cuando hay actividades en paralelo.

detrás de la D, resultando finalmente el grafo de la Figura 10, en donde se numeran los nodos:



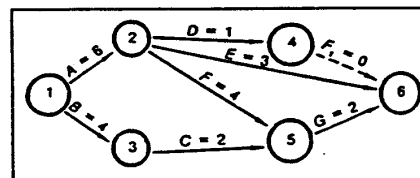
**Figura 10.** PERT final.

## 5. Optimización del PERT mediante la teoría de grafos

Se lleva a cabo mediante dos importantes apoyos estadísticos, que son el cálculo de los tiempos temprano y retardado, por una parte, y, por otra, la incidencia de las holguras en el camino crítico.

### 5.1. Cálculo de los tiempos temprano (*early*) y retardado (*last*)

Llamaremos  $t(i,j)$  al tiempo de la actividad que une el suceso  $i$  y el suceso  $j$ . Si en el grafo de la Figura 10 colocamos los tiempos de cada actividad que hallan en el **Cuadro 1** y tenemos en cuenta que en la actividad ficticia  $F_1$  el tiempo será nulo al no consumir ninguno, resulta el PERT de la Figura 11.



**Figura 11.** PERT con tiempos

Los tiempos **early** y **last**, a los que nos referiremos a continuación, se colocarán en cada nodo como se indica en la Figura 12:



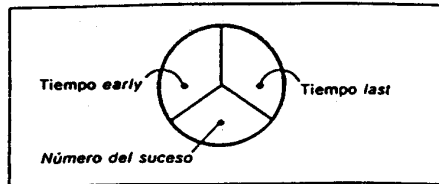


Figura 12. Descripción del nodo de un PERT

**A) El tiempo "early" o tiempo "rápido"** es el menor tiempo que se puede emplear para llegar a este suceso.

El suceso inicio del programa tendrá tiempo **early** nulo. Para los restantes sucesos, siguiendo el orden de su numeración será el valor mayor de entre todas las actividades que en él converjan, y es la resultante de sumar el tiempo inicial de la actividad al tiempo de esa actividad.

Podemos así decir que el tiempo **early** de un suceso **j** es el siguiente:

$$t(j) = \max [t(i) + t(i,j)]$$

siendo **t(i,j)** el tiempo de la actividad **(i,j)**, y por esto **i < j**.

El tiempo mínimo del programa, que indica la duración total de éste, viene dado por el valor del tiempo **early** (o del tiempo **last**) del suceso final del proyecto.

Así, los tiempos **early** del PERT de la Figura 11 son:

El tiempo del suceso inicio del programa es nulo:

**Nodo 1:**  $t(1) = 0$

A los sucesos siguientes solamente les llega una flecha a cada uno:

**Nodo 2:**  $t(2) = t(1) + t(1,2) = 0 + 6 = 6$

**Nodo 3:**  $t(3) = t(1) + t(1,3) = 0 + 4 = 4$

**Nodo 4:**  $t(4) = t(2) + t(2,4) = 6 + 1 = 7$

En el suceso 5 concurren dos flechas; por tanto

$$\text{Nodo 5: } t(5) = \max [t(2) + t(2,5), t(3) + t(3,5)] =$$

$\uparrow$   
(actividad F<sub>1</sub>)

$\uparrow$   
(actividad C)

$$= \max [6+4, 4+2] = \max [10, 6] = 10$$

Finalmente, en el suceso 6 concurren tres flechas, por lo que

**Nodo 6:**

$$t(6) = \max [t(4) + t(4,6), t(2) + t(2,6), t(5)]$$

$\uparrow$   
(actividad F<sub>1</sub>)

$\uparrow$   
(actividad E)

$$+ t(5,6)] = \max [7 + 0, 6 + 3, 10 + 2] =$$

$$\max [7, 9, 12] = 12$$

$$\uparrow$$

(actividad G)

Por tanto, la duración total del programa es **t(6) = 12**.

Los pasos anteriores pueden realizarse directamente en el grafo. De cualquier forma, se obtiene el PERT de la Figura 13.

**B) El tiempo "last" o tiempo "lento"** es el mayor tiempo que se puede emplear hasta llegar a ese suceso para que la duración del programa no se retrase.

El suceso final del programa tendrá tiempo **last** igual a su tiempo **early** calculado. Para los restantes nodos, y siguiendo el orden decreciente de su numeración, se calculará tomando el menor valor de entre todas las actividades que de él salgan, resultantes de restar al tiempo del suceso final de cada actividad el tiempo de dicha actividad.

El tiempo **last** de un suceso **i** es:

$$t'(i) = \min [t'(j) - t(i,j)]$$

Al final, en el suceso de inicio de proyecto, deberá resultar siempre que  $t(1) = t'(1) = 0$

Por tanto, los tiempos **last** del PERT de la Figura 11 son:

El tiempo **last** del suceso fin del programa es igual a su tiempo **early**:

**Nodo 6:**  $t'(6) = 12$

De los sucesos siguientes solamente sale una flecha de cada uno:

**Nodo 5:**  $t'(5) = t'(6) - t(5,6) = 12 - 2 = 10$

**Nodo 4:**  $t'(4) = t'(6) - t(4,6) = 12 - 0 = 12$

**Nodo 3:**  $t'(3) = t'(5) - t(3,5) = 10 - 2 = 8$

Del suceso 2 parten tres actividades, por lo que

**Nodo 2:**  $t'(2) = \min [t'(4) - t(2,4), t'(6) -$   
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 (actividad D) (actividad E)

$t(2,6), t'(5) - t(2,5)] = \min [12-1, 12-3, 10-4] =$   
 $\uparrow$   
 (actividad F)

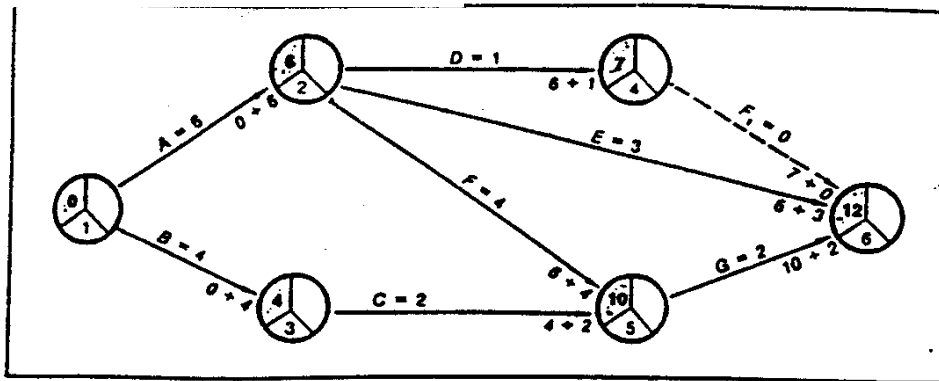
$= \min [11, 9, 6] = 6$

**Nodo 1:**  $t'(1) = \min [t'(2) - t(1,2), t'(3) - t(1,3)] =$   
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 (actividad A) (Actividad B)

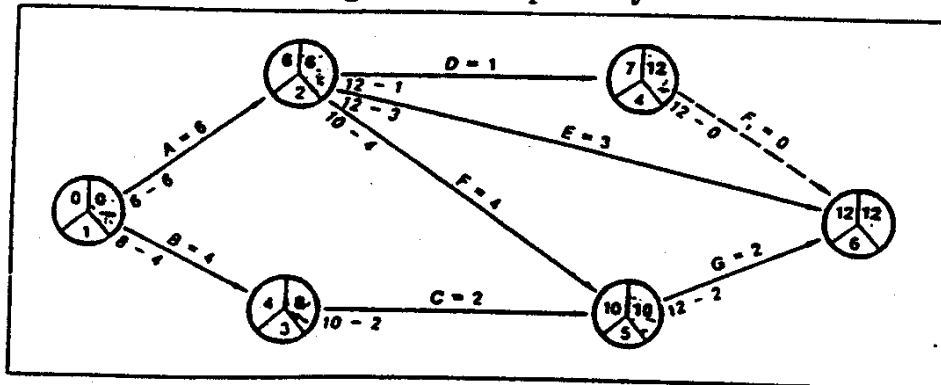
$= \min [6 - 6, 8 - 4] = \min [0, 4] = 0$

Los pasos anteriores pueden realizarse directamente en el grafo. De cualquier forma, se obtiene el PERT de la Figura 14.

. Finalmente, para el suceso 1, tenemos



**Figura 13. Tiempos early**



## 5.2. Incidencia de las holuras en el camino crítico

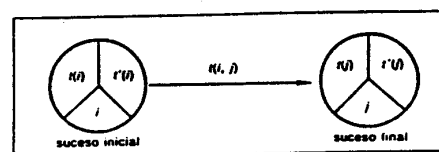
Al aplicar el PERT se considerarán las holuras de tiempo que veremos a continuación, teniendo en cuenta que una determinada actividad se representará como se muestra en la Figura 15, siendo:

$t(i)$  = tiempo **early** del suceso inicial

$t'(i)$  = tiempo **last** del suceso inicial

$t(j)$  = tiempo **early** del suceso final

$t'(j)$  = tiempo **last** del suceso final



**Figura 15. Representación de una actividad**

A) La **holgura de un suceso** es la diferencia entre el tiempo **last** y el tiempo **early** de dicho suceso. Es decir,

$$H(i) = t'(i) - t(i)$$

$$H(j) = t'(j) - t(j)$$

Esta holgura indica el tiempo que se puede retrasar su realización sin retrasar el programa:

. Si  $H(i) = 0$  indica que no se puede retrasar el comienzo de la actividad

. Si  $H(j) = 0$  indica que no se puede retrasar el final de esa actividad

B) La **holgura de actividad** puede ser de tres tipos:

a. **Holgura total de una actividad** es igual al tiempo **last** del suceso final menos el tiempo **early** inicial menos el tiempo de la actividad:

$$H^T(i,j) = t'(j) - t(i) - t(i,j)$$

Indica el tiempo que puede retrasarse una actividad determinada sin retrasar el programa.

Las actividades cuya holgura total es cero se llaman **actividades críticas**. El **camino crítico**,

que va del suceso inicio del programa hasta el suceso fin, viene determinado por aquellas actividades que sean críticas. Esto significa que las actividades críticas son la clave para que el programa total no se retrase. Puede haber más de un camino crítico.

Si la holgura total de una actividad es nula, deben ser nulas las holguras de su suceso inicial y final, pero la inversa no tiene por qué ser cierta. Es decir, si

$$H^T(i,j) = 0 \Rightarrow \begin{cases} H(i) = 0 \\ H(j) = 0 \end{cases}$$

Si solamente deseamos determinar el camino crítico bastará realizar los siguientes pasos:

a) Marcar los nodos cuyo tiempo **early** sea igual a su tiempo **last**, es decir, aquellos cuya holgura de suceso sea nula.

b) Investigar los posibles caminos que puedan unir los nodos anteriores, marcando aquellas actividades cuya holgura total sea nula.

Aplicándolo al ejemplo que desarrollamos, resulta:

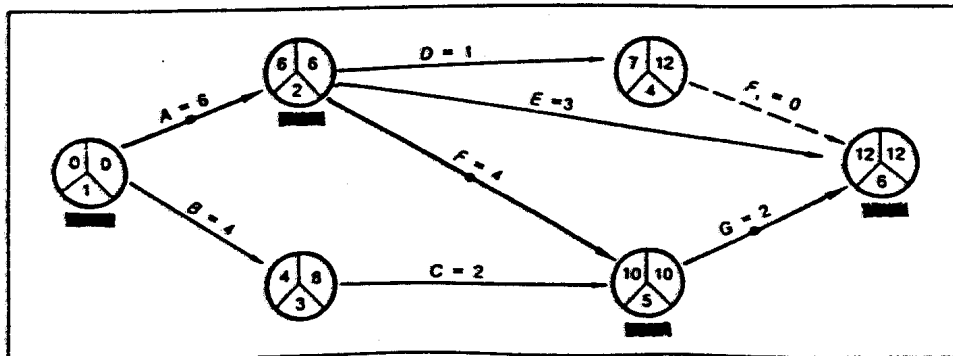


Figura 16. Camino crítico

b. **Holgura libre** es igual al tiempo **early** del suceso final menos el tiempo **early** inicial menos el tiempo de la actividad:

$$H^L(i,j) = t(j) - t(i) - t(i,j)$$

Esta holgura indica qué parte de la holgura total se puede consumir sin afectar a las actividades posteriores.

c. **Holgura independiente** es igual al tiempo **early** del suceso final menos el tiempo **last** inicial menos el tiempo de la actividad:

$$H^I(i,j) = t(j) - t'(i) - t(i,j)$$

Esta holgura corresponde a cuando la actividad anterior ha terminado en su tiempo **last**, y la posterior a la que se considera que empieza en su tiempo **early**. Puede ser negativa.

De cualquier modo las tres holguras cumplen las relaciones siguientes:

$$H^T(i,j) \geq H^L(i,j) \geq H^I(i,j)$$

Se construye el Cuadro 3 para el PERT de la Figura 15:

**Cuadro 3.** Resumen con todos los datos del PERT

Activ. i - j	Nombre	t(i,j)	t(i)	t(j)	t'(i)	t'(j)	H(i)	H(j)	H <sup>T</sup>	H <sup>L</sup>	H <sup>I</sup>	Situac.
1 2	A	6	0	6	0	6	0	0	0	0	0	Crítica
1 3	B	4	0	4	0	8	0	4	4	0	0	
2 4	D	1	6	7	6	12	0	5	5	0	0	Crítica
2 5	F	4	6	10	6	10	0	0	0	0	0	
2 6	E	3	6	12	6	12	0	0	3	3	3	
3 5	C	2	4	10	8	10	4	0	4	4	0	Crítica
4 6	F <sub>1</sub>	0	7	12	12	12	5	0	5	5	0	
5 6	G	2	10	12	10	12	0	0	0	0	0	

Vemos como el tiempo mínimo es 12.

En este Cuadro se manifiesta la relevante virtualidad de la teoría de grafos en la planificación de un estudio de carácter interventivo. En el ejemplo desarrollado a modo de ilustración se han propuesto actividades genéricas representadas mediante símbolos, y duraciones expresadas con tiempos en cualquier unidad convencional, pero en estudios empíricos, el que

se disponga de información relativa a la optimización que implica una determinada secuenciación de actividades y sus respectivas duraciones va a suponer enormes ventajas, y no sólo en cuanto a la eficacia del programa de intervención, sino respecto también a su eficiencia, dado que puede ser considerable la reducción de recursos necesarios.

## 6. Conclusiones

Las posibilidades que brinda el PERT han permitido que la implementación de programas se llevase a cabo con mayor sistematización y de acuerdo con el plan previsto, lo cual facilita indudablemente no sólo la evaluación del programa sino su análisis económico.

La aproximación al PERT desde el análisis de grafos dota a este instrumento de mayores ventajas, y su uso racional y minucioso es altamente favorable a la precisión que cada vez con mayor intensidad está caracterizando a la evaluación de programas de intervención.

## 7. Referencias bibliográficas

- Boada, J. (1992). *"Modelo Conducta-Habilidad-Juego": Intervención Cognitiva en el Microsistema Familiar con Preescolares*. Tesis Doctoral no publicada. Tarragona: Universidad de Barcelona.
- Camps, M. (1987). *Organización de contenidos y memoria en situación de enseñanza-aprendizaje*. Tesis Doctoral no publicada. Tarragona: Universidad de Barcelona.
- Frank, O. (1978a). Estimation of the number of connected components in a graph by using a sampled subgraph. *Scandinavian Journal of Statistics*, 5, 177-188.
- Frank, O. (1978b). Inferences concerning cluster structure. In L.C.A. Corsten & J. Hermans (Eds.). *Proceedings in Computational Statistics*. Vienna: Physica Verlag.
- Frank, O. (1981). A survey of statistical methods for graph analysis. In S. Leinhardt (Ed.). *Sociological Methodology 1981*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. & Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Heredia, B. (1983). *Manual para la elaboración de material didáctico*. México: Trillas.
- Huerta, J. (1982). *Organización lógica de las experiencias de aprendizaje*. México: Trillas (ed. orig., 1977).
- Muscatello, D.B. (1988) Developing an agenda that works: The right choice at the right time. In J.A. McLaughlin, L.J. Weber, R.W. Covert & R.B. Ingle (Eds.) *Evaluation utilization* (pp. 21-31). San Francisco: Jossey-Bass.
- Salazar, J. (1979). *Enfoque de sistemas en la Educación. Teoría de gráficas*. México: Limusa.
- Solano, G. (1983). *Principios de análisis estructural educativo*. México: Trillas.
- Veney, J.E. & Kaluzny, A.D. (1984) *Evaluation and decision making for health services programs*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Wilson, R.J. (1983). *Introducción a la teoría de grafos*. Madrid: Alianza Universidad (ed. orig., 1972).

